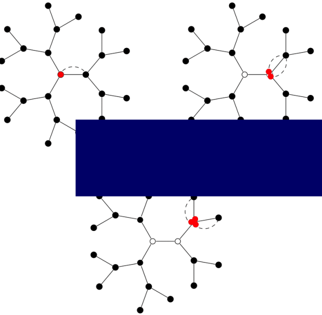
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



OUTROS MODELOS DE PERCOLAÇÃO

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

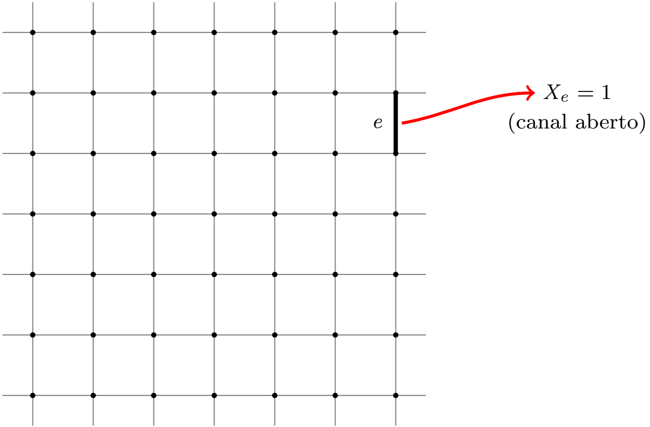
Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

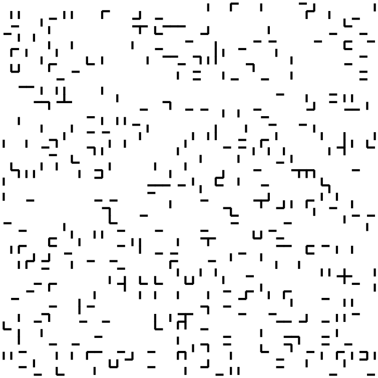
- Percolação orientada
- Percolação de vértices
- Percolação de discos

Lembrete!

O *modelo de percolação independente de elos* *em* $\mathbb{Z}^d$ *define-se usando uma família de v.a. i.i.d.* $(X_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$*, com distribuição comum* $X_e \sim Bernoulli(p)$.

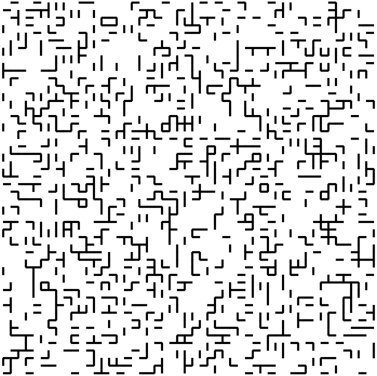


Possível realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$



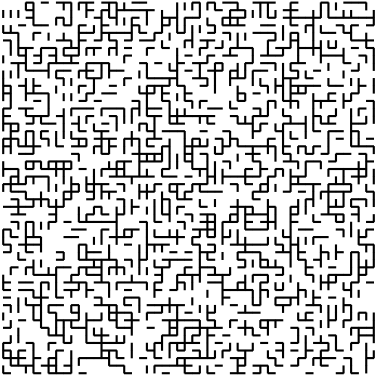
$p = 0,10$

Possível realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$



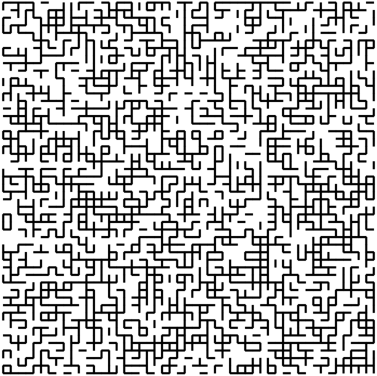
$$p = 0,25$$

Possível realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$



$p = 0,40$

Possível realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$



$p = 0,50$

Transição de fase

O evento $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$ chama-se percolação.

Teorema 1

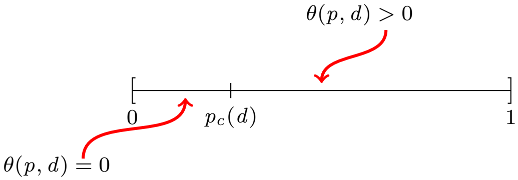
Seja $\theta(p, d) = P(|\mathcal{C}| = \infty)$*. Para* $d \geq 2$*, existe um valor crítico*

$$p_c(d) \in (0, 1)$$

tal que

i. $\theta(p, d) = 0$ *se* $p < p_c(d)$.

ii. $\theta(p, d) > 0$ *se* $p > p_c(d)$.



Sobre a prova

A prova é separada en três partes:

1. Definir: $p_c(d) := \inf\{p \in [0,1] : \theta(p,d) > 0\}$.

   Uma vez definido, garantir que $p_c(d) \in (0,1)$.

   2. Para isto encontramos um limitante inferior positivo de $p_c(d)$
   3. e um limitante superior que seja menor que 1.

Observação

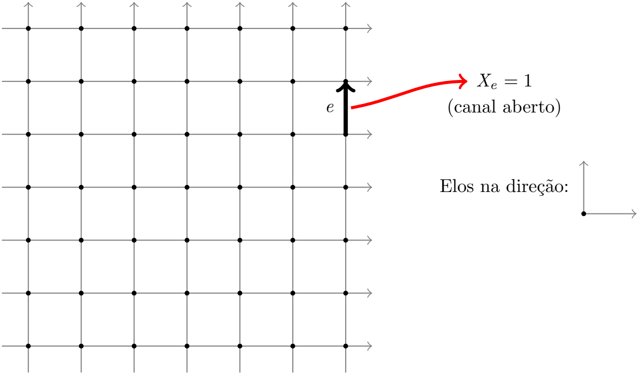
$$p_c(1) = 1,\ p_c(2) = 1/2,\ p_c(d) \sim 1/2d.$$

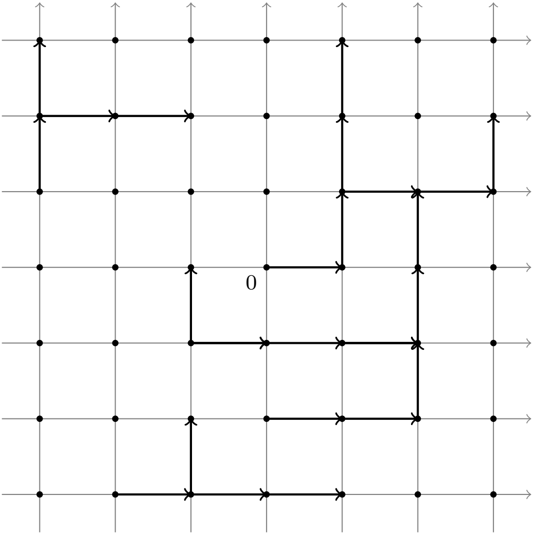
Ref.: *Notas em Percolação, Luiz R. Fontes (IME-USP), 1996.*
Disponible en: `https://www.ime.usp.br/~lrenato`

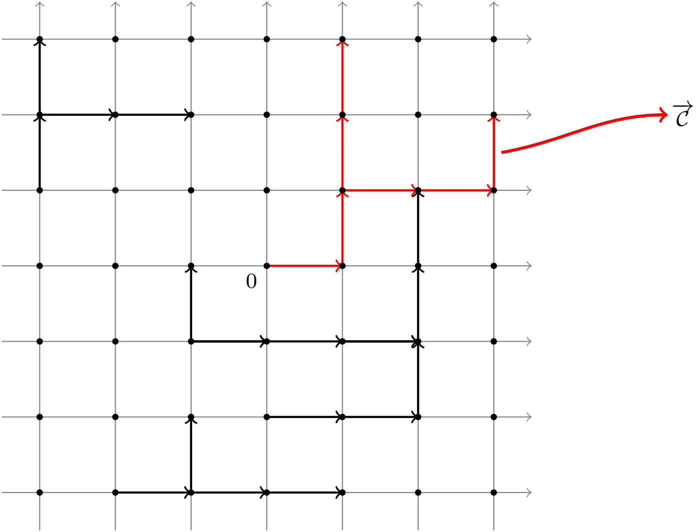
Ref.: *Kesten, H. (2006). What Is ... Percolation?, Notices Amer. Math. Soc.* **53** *n.5, 572-573.*

Modelo de percolação orientada

O modelo de percolação orientada em $\mathbb{Z}^d$ define-se em $\vec{\mathbb{Z}}^d$ usando uma família de v.a. i.i.d. $(X_e)_{e\in\mathcal{E}(\vec{\mathbb{Z}}^d)}$, com distribuição comum $X_e \sim Bernoulli(p)$.




0


0
$\overrightarrow{\mathcal{C}}$

Transição de fase

Teorema 2

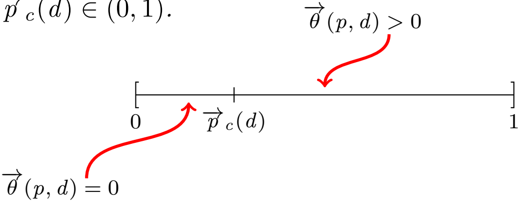
Para cada $d \geq 2$ sejam

$$\vec{\theta}(p, d) := P(|\vec{\mathcal{C}}| = \infty)$$

e

$$\vec{p}_c(d) := \sup\{p \geq 0 : \vec{\theta}(p, d) = 0\}.$$

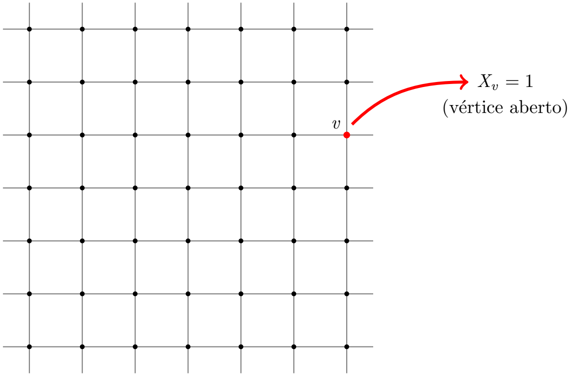
Então, para todo $d \geq 2$, $\vec{p}_c(d) \in (0, 1)$.

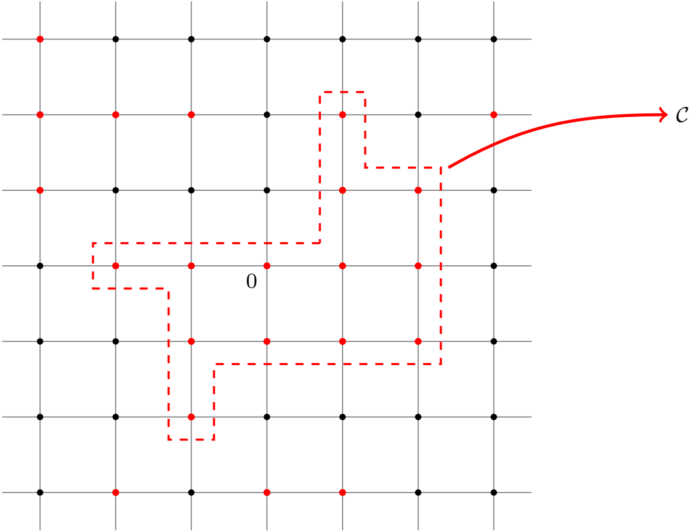


Prova. Ver Teorema 3.17 (Probability on Graphs de Grimmett).

Modelo de percolação de sítios

O modelo de percolação de sítios em $\mathbb{Z}^d$ define-se usando uma família de v.a. i.i.d. $(X_v)_{v \in \mathbb{Z}^d}$, com distribuição comum $X_v \sim Bernoulli(p)$.





0
$\mathcal{C}$

Transição de fase: os modelos em grafos

Para um grafo qualquer conexo com infinitos vértices podemos definir os modelos de percolação de elos e de sítios. Para isto, identificamos um vértice qualquer de G e o chamamos de origem, denotamos 0, e usamos a notação $\mathcal{C}^{\text{elos}}$ e $\mathcal{C}^{\text{sítios}}$ para os aglomerados de 0 em cada um dos modelos. Da mesma forma, usamos:

$$\theta^{\text{elos}}(p) \quad \text{e} \quad \theta^{\text{sítios}}(p)$$

para as probabilidades de percolação e observamos que

$$p_c^{\text{elos}} := \sup\{p \geq 0 : \theta^{\text{elos}}(p) = 0\}$$

e

$$p_c^{\text{sítios}} := \sup\{p \geq 0 : \theta^{\text{sítios}}(p) = 0\}$$

estão bem definidos.

Transição de fase em grafos

Teorema 3

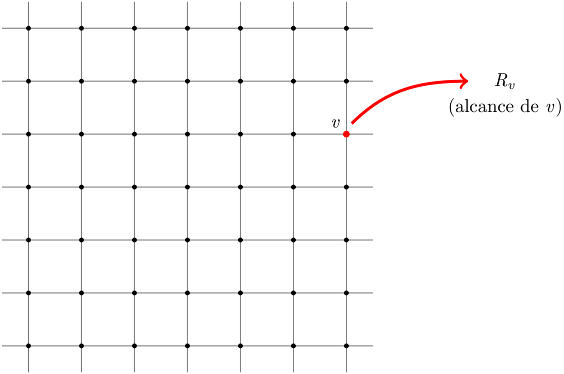
Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com infinitos vértices, com E enumerável e de grau máximo $m < \infty$. Então,

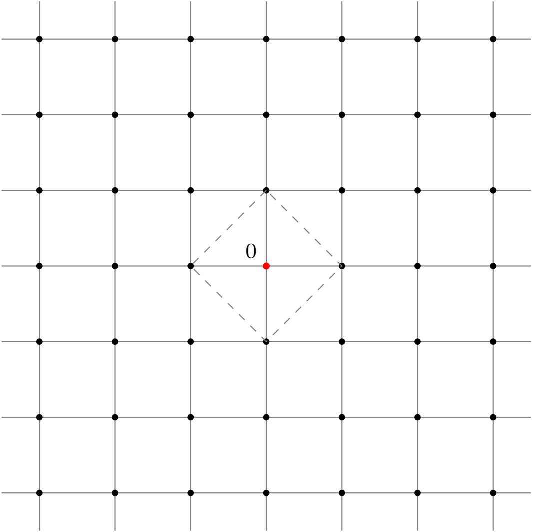
$$\frac{1}{m-1} \leq p_c^{elos} \leq p_c^{sítios} \leq 1 - \left(1 - p_c^{elos}\right)^m .$$

Prova. Ver Teorema 1.33 (Percolation de Grimmett).

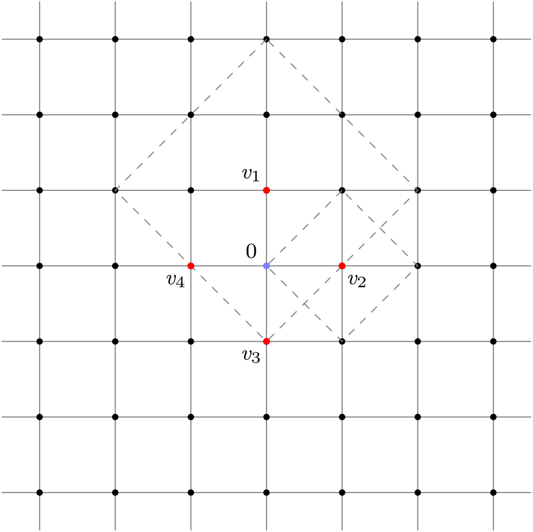
Modelo de percolação de discos

O modelo de percolação de discos em um grafo conexo com infinitos vértices $G = (V, E)$ define-se usando uma família de v.a. i.i.d. $(R_v)_{v \in V}$, com distribuição comum $P(R_v = n) = (1-p)p^n$, $n \geq 0$.

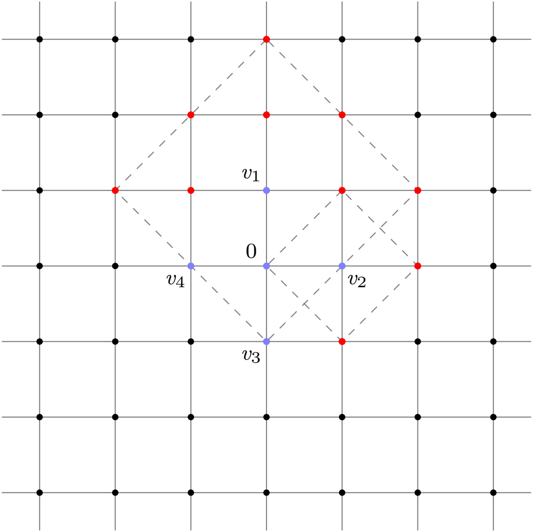




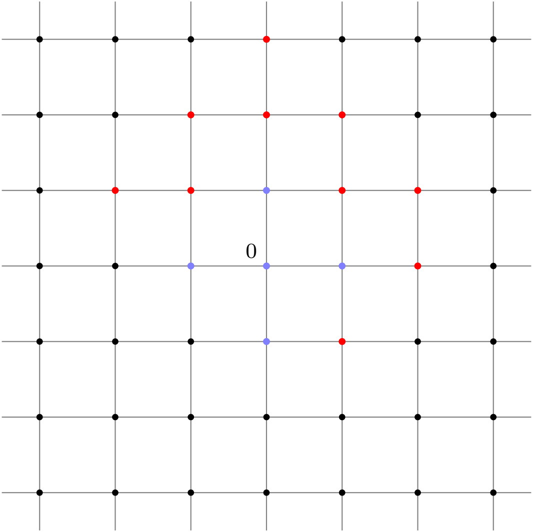
Suponha que $R_0 = 1$.



Suponha que $R_{v_1} = 2, R_{v_2} = 1, R_{v_3} = R_{v_4} = 0.$



O processo continua “abrindo” vértices e exibindo os R_v’s.



O processo continua “abrindo” vértices e exibindo os R_v’s.

Transição de fase em grafos

Teorema 4
Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com infinitos vértices e de grau máximo $m < \infty$. Então,

$$-1 + \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{1/2} \leq p_c^{discos} \leq p_c^{sítios}.$$

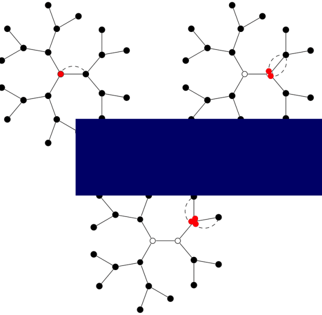
Prova. Ver Proposições 2 e 3 (Lebenstzayn e Rodriguez, 2008).

Referências

G. Grimmett. Probability on Graphs. 1st ed. Cambridge. 2010.
(seção 3.4: percolação orientada)

G. Grimmett. Percolation. 2nd ed. Springer. 1999.
(seção 1.6: percolação de sítios)

E. Lebensztayn, P.M. Rodríguez, The disk-percolation model on graphs, Statist. Probab. Lett. 78 (2008), no. 14, 2130-2136.
(percolação de discos)



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

e-mail: pablo@de.ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza