Lista de exercícios 1
PGE966 - Processos Estocásticos | PPGE - UFPE
Prof. Pablo M. Rodriguez
1° Semestre de 2021

No que segue $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denota um espaço de probabilidade. Isto é, Ω é um conjunto não-vazio, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma probabilidade em $\mathcal{F}$.

Prove as seguinte propriedades:

1. Se $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

2. (Fórmula de inclusão-exclusão) Se $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ então
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

3. Para $A_n \in \mathcal{F}$ seja:
$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$
   Então:
   (a) $P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$.
   (b) $P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n)$.
   (c) $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} P(A_n)$.

   Observação: quando $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ denota-se $\lim_{n\to\infty} A_n$.

4. Se $A_n \searrow$ é uma sequência de eventos aleatórios então $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

5. Se $P(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.

6. Se $P(A_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$.

7. Se $A, B \in \mathcal{F}$ então $|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$.

8. Se $A, B, C \in \mathcal{F}$ então $P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap C^c)P(C^c|B)$.

9. Suponha que A e B são tais que $P(A|B) = P(B|A)$, $P(A \cup B) = 1$ e $P(A \cap B) > 0$. Então $P(A) > 1/2$.

10. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos mutuamente exclusivos e para $B \in \mathcal{F}$ vale que $P(B|A_n) \geq c$ para todo n, em que $c > 0$ é uma constante, então
$$P\left(B \,\middle|\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq c.$$